

令和9年度専攻科入学者学力 選抜 試験問題

注意: すべての問題について指示のない限り途中の計算式も書くこと。途中の計算式も採点の際考慮する。
計算用紙は回収しない。

科 目	数 学	分 野	線形代数	1/3	受験番号	
-----	-----	-----	------	-----	------	--

[1] 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 対角化せよ。対角化行列も求めること。

令和 9 年度専攻科入学者学力 選抜 試験問題

科 目	数 学	分 野	微分積分	2/3	受験番号	
-----	-----	-----	------	-----	------	--

[2] $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + z^3 - xyz$ について, $f(x, y, z) = 0$ で与えられる x, y の関数 z を偏微分せよ. また, 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 $(1, -1, 1)$ における接平面の方程式を求めよ. 答えのみを記せ.

$\frac{\partial z}{\partial x} =$	$\frac{\partial z}{\partial y} =$	接平面
-----------------------------------	-----------------------------------	-----

[3] 次の (1), (2) の微分方程式について, (1) は一般解を求め, (2) は () 内の条件を満たす解を求めよ.

(1) $t \frac{dx}{dt} + x = \log t$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 8x = e^{2t} \quad \left(t = 0 \text{ のとき } x = 1, \frac{dx}{dt} = 0 \right)$

令和9年度専攻科入学者学力 選抜 試験問題

科 目	数 学	分 野	微分積分	3/3	受験番号	
-----	-----	-----	------	-----	------	--

[4] D を () 内の領域とするととき, 次の (1), (2) の 2 重積分の値を求めよ.

(1) $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ($D : y = x, y = 2x, x = 1$ で囲まれた部分)

(2) $I = \iint_D \sin(2x - y) dx dy$ ($D : 0 \leq x + 3y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq 2\pi$)

[5] 関数 $f(x, y) = 2x^3 + 16x^2 - 38x - 10xy + y^2 + 10y$ について $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点の座標を求めよ. また, それらの点で極値を取るか判定せよ. 極値を取る場合は極小か極大を判定し, その値を求めよ.

令和9年度専攻科入学者学力選抜 試験問題 (解答例)

注意: すべての問題について指示のない限り途中の計算式も書くこと。途中の計算式も採点の際考慮する。
計算用紙は回収しない。

科目	数学	分野	線形代数	1/3	受験番号	
----	----	----	------	-----	------	--

[1] 次の問いに答えよ。

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めよ。(8点)

[解答例]

行列式は $|A| = -2 - 2 + 4 - 1 = -1$.

逆行列は基本変形により $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 対角化せよ。対角化行列も求めること。(13点)

[解答例]

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \text{ から, 固有値は } \lambda = 1 \text{ (重解)}, 2.$$

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \text{ より } 2x - y + 2z = 0 \text{ を得るので, } y = 2x + 2z. \text{ } x = c_1, y = c_2 \text{ とおくと}$$

固有ベクトルは $v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$)である。

$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \text{ より } 3x - 2y + 4z = 0, x - y + z = 0, -2x + y - 3z = 0 \text{ を得るので,}$$

$x = -2z, y = -z$. よって $z = c_3$ とおくと固有ベクトルは $v_2 = c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($c_3 \neq 0$)である。

対角化行列を $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置くと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

令和9年度専攻科入学者学力 選抜 試験問題 (解答例)

科目	数学	分野	微分積分	2/3	受験番号	
----	----	----	------	-----	------	--

[2] $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + z^3 - xyz$ について, $f(x, y, z) = 0$ で与えられる x, y の関数 z を偏微分せよ. また, 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 $(1, -1, 1)$ における接平面の方程式を求めよ. 答えのみを記せ. (各4点)

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x + yz}{3z^2 - xy}$	$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y + xz}{3z^2 - xy}$	接平面 $3x + 5y + 4z = 2$
--	---	------------------------

[3] 次の (1), (2) の微分方程式について, (1) は一般解を求め, (2) は () 内の条件を満たす解を求めよ. (各13点)

(1) $t \frac{dx}{dt} + x = \log t$

[解答例]

$$\frac{dx}{dt} = x' \text{ と略記する.}$$

$tx' + x = 0$ を解く. 変数分離により $x = \frac{C}{t}$ が一般解である.

$C = u(t)$ と置いて定数変化法を使う. $x' = \frac{u't - u}{t^2}$ を元の微分方程式に代入すれば $u' = \log t$ となるので, $u = \int \log t dt = t(\log t - 1) + C$.

$$\text{よって一般解は } x = \log t - 1 + \frac{C}{t}.$$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 8x = e^{2t} \quad \left(t = 0 \text{ のとき } x = 1, \frac{dx}{dt} = 0 \right)$

[解答例]

$$\frac{dx}{dt} = x', \frac{d^2x}{dt^2} = x'' \text{ と略記する.}$$

斉次式 $x'' - 4x' + 8x = 0$ を解く. 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ の解は $\lambda = 2 \pm 2i$ であるので, 斉次式の一般解は $x = e^{2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ である.

もう一つの解を $x = Ce^{2t}$ と予想する. $x' = 2Ce^{2t}$, $x'' = 4Ce^{2t}$ を問題の微分方程式に代入して $C = \frac{1}{4}$. よって問題の微分方程式の一般解は $x = e^{2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4})$ である.

$x' = e^{2t}(2C_1 \cos 2t + 2C_2 \sin 2t - 2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t + \frac{1}{2})$. x と x' に初期条件を代入して, $1 = C_1 + \frac{1}{4}$, $0 = 2C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2}$ となるので $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_2 = -1$.

$$\text{よって求める解は } x = e^{2t} \left(\frac{3}{4} \cos 2t - \sin 2t + \frac{1}{4} \right) \text{ である.}$$

令和9年度専攻科入学者学力選抜 試験問題(解答例)

科目	数学	分野	線形代数	3/3	受験番号	
----	----	----	------	-----	------	--

[4] D を () 内の領域とすると、次の (1), (2) の 2 重積分の値を求めよ。(各 13 点)

$$(1) I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad (D : y = x, y = 2x, x = 1 \text{ で囲まれた部分})$$

[解答例]

D は $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x$ と表される。よって $I = \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^2) dx dy$ である。

$$\int_x^{2x} (x^2 + y^2) dy = \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_x^{2x} = \frac{10}{3} x^3. \text{ よって } I = \int_0^1 \frac{10}{3} x^3 dx = \left[\frac{5}{6} x^4 \right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

$$(2) I = \iint_D \sin(2x - y) dx dy \quad (D : 0 \leq x + 3y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq 2\pi)$$

[解答例]

$u = x + 3y, v = x + y$ と置くと $x = \frac{1}{2}(-u + 3v), y = \frac{1}{2}(u - v)$. このヤコビ行列式は $-\frac{1}{2}$. よって求める積分は $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\left(-\frac{3}{2}u + \frac{7}{2}v\right) du dv$ と書ける。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin\left(-\frac{3}{2}u + \frac{7}{2}v\right) dv &= \left[-\frac{2}{7} \cos\left(-\frac{3}{2}u + \frac{7}{2}v\right) \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{7} \left\{ \cos\left(-\frac{3}{2}u + 7\pi\right) - \cos\left(-\frac{3}{2}u\right) \right\} \\ &= \frac{4}{7} \cos \frac{3}{2}u. \end{aligned}$$

$$\text{よって求める積分は } I = \frac{1}{2} \frac{4}{7} \int_0^\pi \cos \frac{3}{2}u du = \frac{2}{7} \left[\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}u \right]_0^\pi = -\frac{4}{21}.$$

[5] 関数 $f(x, y) = 2x^3 + 16x^2 - 38x - 10xy + y^2 + 10y$ について $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点の座標を求めよ。また、それらの点で極値を取るか判定せよ。極値を取る場合は極小か極大を判定し、その値を求めよ。(15 点)

[解答例]

$f_x = 6x^2 + 32x - 38 - 10y, f_y = -10x + 2y + 10$ なので $f_x = 0$ かつ $f_y = 0$ となる点の座標は $(x, y) = (2, 5), (1, 0)$.

$f_{xx} = 12x + 32, f_{xy} = -10, f_{yy} = 2. H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2(12x + 32) - 100 = 24x - 36$ とおく。

(2, 5) のとき

$H(2, 5) = 12 > 0$ であり $f_{xx}(2, 5) = 56 > 0$ なので極小値を取る。このとき $f(2, 5) = -21$.

(1, 0) のとき

$H(1, 0) = -12 < 0$ なので極値を取らない。

以上により

(2, 5) のとき極小値 -21 をとり, (1, 0) のとき極値を取らない。