

注意: 全ての問題について指示のない限り途中の計算式も書くこと. 計算用紙は回収しない.

科目	数学	分野	線形代数・微分積分	1/3	受験番号	
----	----	----	-----------	-----	------	--

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

配点 16 点

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & 5 \\ -1 & -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = -(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

$\therefore$ 固有値 $\lambda = -1, 3, 4$

固有値 -1 のとき,

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ より, } C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_1 \neq 0)$$

固有値 3 のとき,

$$(A - 3E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ より, } C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (C_2 \neq 0)$$

固有値 4 のとき,

$$(A - 4E) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ より, } C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (C_3 \neq 0)$$

(2) 対角化行列を定め, A を対角化せよ.

配点 6 点

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ とすると, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $z = x^2 e^{3y}$, $x = e^{2t}$, $y = \log(2t + 1)$ のとき, $\frac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ.

配点 12 点

$$z_x = 2x e^{3y} = 2e^{2t}(2t + 1)^3, \quad z_y = 3x^2 e^{3y} = 3e^{4t}(2t + 1)^3, \quad \frac{dx}{dt} = 2e^{2t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{2t + 1}$$

より,

$$\frac{dz}{dt} = 4e^{4t}(2t + 1)^3 + 6e^{4t}(2t + 1)^2 = \underline{2e^{4t}(2t + 1)^2(4t + 5)}$$

を得る.

令和8年度専攻科入学者学力選抜 試験問題

科目	数学	分野	微分積分	2/3	受験番号	
----	----	----	------	-----	------	--

3. $f(x, y) = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $z = f(x, y)$ の全微分を求めよ。

配点 6 点

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2}}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2y}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2}}$$

より,

$$dz = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2}}dx - \frac{2y}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2}}dy$$

を得る。

(2) 関数 $z = f(x, y)$ のグラフ上の点 $(2, 1, \sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ。配点 6 点

上記の偏微分 f_x, f_y を接平面の方程式 $z - f(2, 1) = f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1)$ に代入すると、

$$z - \sqrt{2} = -\sqrt{2}(x - 2) - \sqrt{2}(y - 1)$$

となり、整理すると、

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z = 4\sqrt{2}$$

を得る。

4. 関数 $f(x, y) = \sin 2x + \cos y - x + \frac{1}{2}y$ について次の問いに答えよ。

(1) 偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ を求めよ。

配点 10 点

$$f_x = 2 \cos 2x - 1, \quad f_y = -\sin y + \frac{1}{2}, \quad f_{xx} = -4 \sin 2x, \quad f_{yy} = -\cos y, \quad f_{xy} = 0$$

(2) $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ において、 $f(x, y)$ の極値を求めよ。極値をとる x, y の値も明示すること。

配点 12 点

$$f_x = 0 \text{ の解は } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \quad f_y = 0 \text{ の解は } y = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi.$$

$$\text{よって、極値をとる点の候補は } (x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right), \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right).$$

$$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \text{ とする.}$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ のとき, } H = (-2\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \text{ より,}$$

$$\text{極大値 } f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} \text{ をとる.}$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) \text{ のとき, } H = (-2\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 < 0 \text{ より, 極値を取らない.}$$

$$\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}\right) \text{ のとき, } H = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 < 0 \text{ より, 極値を取らない.}$$

$$\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) \text{ のとき, } H = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0 \text{ より,}$$

$$\text{極小値 } f\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi \text{ をとる.}$$

令和 8 年度専攻科入学者学力選抜 試験問題

科目	数学	分野	微分積分	3/3	受験番号	
----	----	----	------	-----	------	--

5. 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq -x + 4y \leq 2, 1 \leq 3x + 2y \leq 8\}$ に対して, 二重積分

$$\iint_D \frac{-x + 4y}{\sqrt[3]{3x + 2y}} dx dy$$

の値を求めよ.

配点 16 点

$u = -x + 4y, v = 3x + 2y$ とおくと, $x = -\frac{1}{7}u + \frac{2}{7}v, y = \frac{3}{14}u + \frac{1}{14}v$ となる. このとき, ヤコビアン $J(u, v)$ は

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{vmatrix} = -\frac{1}{14}$$

となり, 二重積分は,

$$\int_1^8 \int_0^2 \frac{u}{\sqrt[3]{v}} \left| -\frac{1}{14} \right| du dv = \frac{1}{14} \int_1^8 \left[\frac{1}{2} u^2 v^{-\frac{1}{3}} \right]_0^2 dv = \frac{1}{7} \left[\frac{3}{2} v^{\frac{2}{3}} \right]_1^8 = \underline{\underline{\frac{9}{14}}}$$

となる.

6. 微分方程式 $\frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 13x = 4 \cos t$ の一般解を求めよ.

配点 16 点

$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ とおくと, $\lambda = 2 \pm 3i$ となり, 斉次のときの一般解は

$$x = e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

となる. 1 つの解を $x = A \cos t + B \sin t$ とおき, 与式に代入すると,

$$(-A \cos t - B \sin t) - 4(-A \sin t + B \cos t) + 13(A \cos t + B \sin t) = (12A - 4B) \cos t + (4A + 12B) \sin t = 4 \cos t$$

となる. 係数から連立方程式を作り,

$$\begin{cases} 12A - 4B = 4 \\ 4A + 12B = 0 \end{cases}$$

を解くと, $A = \frac{3}{10}, B = -\frac{1}{10}$ となる. 以上から,

$$x = \underline{\underline{e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + \frac{3}{10} \cos t - \frac{1}{10} \sin t}}$$

となる. ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.